Die Anwendung einer Transformation von Bianchi auf die Schraubenlinie des Kreiszylinders zur Erzeugung neuer Kurven konstanter Torsion

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung der Doktorwürde
einer Hohen Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität
zu Tübingen

vorgelegt von

HELMUT HOFMANN
aus Crailsheim

1937

Buchdruckerei Albert Becht, Tübingen, Hirschgasse 16

Dekan: Professor Dr. E. Lehmann

Referent: Professor Dr. K. Kommerell

Tag der mündlichen Prüfung: 17. Dezember 1936.

R. UNIV. BIBLIOTHEEK LEIDEN

Inhaltsverzeichnis.

		Seite
I. Kapitel:	Die Transformation von Bianchi	1—10
§ 1.	Bezeichnungen und wichtige Beziehungen	1—3
§ 2.	Die Methode von Bianchi	3—7
§ 3.	Die charakteristische Gleichung und ihre Lösung . .	7—9
§ 4.	Bianchi's Lösung	9—10
II. Kapitel:	Die Anwendung der Transformation von Bianchi auf die Schraubenlinie des Kreiszylinders	10—24
§ 5.	Die Ausgangskurve H_0, ihre Krümmung und ihre Torsion	10—11
§ 6.	Lösung der charakteristischen Gleichung	11—12
§ 7.	Die Gleichung der ∞^1 transformierten Kurven H_1 . .	12—13
§ 8.	Die Rotation der transformierten Kurven H_1 um die z-Achse und die entstehenden Rotationsflächen R_1	13—14
§ 9.	Untersuchung des Meridians der ∞^1 Rotationsflächen R_1 .	14
§ 10.	Die transformierte Kurve H_1^0	15
§ 11.	Die Rotationsfläche R_1^0	15—19
§ 12.	Die ∞^1 Rotationsflächen R_1 und ihre Beziehung zueinander	19—21
§ 13.	Die ∞^1 transformierten Kurven H_1 und ihre Beziehung zueinander	21—24
III. Kapitel:	Die wiederholte Anwendung der Bianchi'schen Transformation	25—34
§ 14.	Die Ausgangskurve H_1^0 und ihre Krümmung . . .	25
§ 15.	Die charakteristische Gleichung und das Partikulärintegral	25—26
§ 16.	Lösung der charakteristischen Gleichung	26
§ 17.	Die Gleichungen der ∞^1 transformierten Kurven H_2 . .	27—29
§ 18.	Die transformierte Kurve H_2^0	29—30
§ 19.	Die transformierten Kurven H_2^2, H_2^4, H_2^6	31
§ 20.	Die ∞^1 transformierten Kurven H_2	31—34
Zusammenfassung		34

I. Kapitel.

Die Transformation von Bianchi.

§ 1. Bezeichnungen und wichtige Beziehungen.

Um eine Kurve C analytisch zu definieren, beziehen wir sie auf ein rechtwinkliges Koordinatensystem und drücken die Koordinaten x, y, z eines beliebigen Punktes P der Kurve C als Funktionen einer veränderlichen Größe u aus

(1) $$x = x(u),\ y = y(u),\ z = z(u).$$

Diese Funktionen des Parameters u werden samt ihren 1., 2., 3. Ableitungen als endlich und stetig vorausgesetzt. Ändert sich u stetig, so bewegt sich der Punkt P nach einem bestimmten Gesetz und beschreibt so die Kurve C im Raume.

In den meisten Fällen wählt man jedoch als Parameter den von einem festen Punkt der Kurve C aus gemeßenen Bogen s derselben; zur Bestimmung des Bogens s als Funktion von u hat man die Gleichung

(2) $$\frac{ds}{du} = +\sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2}.$$

Für die Wurzel muß das positive Zeichen gewählt werden, wenn s mit wachsendem Parameter u zunehmen soll. Dann sind die Gleichungen der Raumkurve C

(1′) $$x = x(s),\ y = y(s),\ z = z(s).$$

Die Gleichung (2) kann man auch in der Form

(2′) $$ds^2 = \Sigma dx^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$$

schreiben, die praktischer ist, da sie von der Wahl des Parameters nicht abhängt.

Sind α, β, γ; l, m, n; λ, μ, ν die Richtungscosinus der Tangente, Hauptnormale, Binormale (begleitendes Dreikant) in einem Punkt der Raumkurve, so bestehen, da die drei Richtungen aufeinander senkrecht sind, die Gleichungen:

(3) $$\begin{cases} \Sigma\alpha^2 = 1,\ \Sigma l^2 = 1,\ \Sigma\lambda^2 = 1, \\ \Sigma l\lambda = 0,\ \Sigma\lambda\alpha = 0,\ \Sigma\alpha l = 0. \end{cases}$$

Weiter sollen diese drei Richtungen ein Rechtssystem bilden; daher ist in der orthogonalen Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ l & m & n \\ \lambda & \mu & \nu \end{vmatrix} = +1$$

jedes Element gleich seiner Unterdeterminante.

Es gelten nun die Beziehungen:[1])

$$(4)\quad \begin{cases} \alpha = \dfrac{dx}{ds} & ; \beta = \dfrac{dy}{ds} & ; \gamma = \dfrac{dz}{ds} \\ l = r \cdot \dfrac{d^2x}{ds^2} & ; m = r \cdot \dfrac{d^2y}{ds^2} & ; n = r \cdot \dfrac{d^2z}{ds^2} \\ \lambda = r \cdot \left(\dfrac{dy}{ds}\dfrac{d^2z}{ds^2} - \dfrac{dz}{ds}\dfrac{d^2y}{ds^2}\right); & \mu = r \cdot \left(\dfrac{dz}{ds}\dfrac{d^2x}{ds^2} - \dfrac{dx}{ds}\dfrac{d^2z}{ds^2}\right); & \nu = r \cdot \left(\dfrac{dx}{ds}\dfrac{d^2y}{ds^2} - \dfrac{dy}{ds}\dfrac{d^2x}{ds^2}\right) \end{cases}$$

Hieraus folgen dann die wichtigen Formeln von Frenet und Serret; sie lauten bei zu Grundelegung eines Rechtssystems: [2])

$$(5)\quad \begin{cases} \dfrac{d\alpha}{ds} = \dfrac{l}{r} & ; \dfrac{d\beta}{ds} = \dfrac{m}{r} & ; \dfrac{d\gamma}{ds} = \dfrac{n}{r} & ; \\ \dfrac{dl}{ds} = -\dfrac{\alpha}{r} + \dfrac{\lambda}{\varrho}; & \dfrac{dm}{ds} = -\dfrac{\beta}{r} + \dfrac{\mu}{\varrho}; & \dfrac{dn}{ds} = -\dfrac{\gamma}{r} + \dfrac{\nu}{\varrho}; & \\ \dfrac{d\lambda}{ds} = -\dfrac{l}{\varrho} & ; \dfrac{d\mu}{ds} = -\dfrac{m}{\varrho} & ; \dfrac{d\nu}{ds} = -\dfrac{n}{\varrho} & \end{cases}$$

Die in (4) und (5) auftretenden Größen r und ρ werden als erster und zweiter Krümmungsradius bezeichnet; die Größe $\frac{1}{r}$ nennt man die erste Krümmung oder schlechthin die Krümmung der Kurve C im Punkte P; $\frac{1}{\varrho}$ ist die zweite Krümmung, Torsion oder Windung der Kurve C im Punkt P.

Ist dt der Winkel zweier benachbarter Tangenten (Kontingenzwinkel), dann ist die Krümmung einer Raumkurve C im Punkt P

$$\frac{1}{r} = \frac{dt}{ds};$$

mit Hilfe von (4) folgt

$$\frac{1}{r^2} = \frac{dt^2}{ds^2} = \frac{d\alpha^2 + d\beta^2 + d\gamma^2}{ds^2} = \sum\left(\frac{d\alpha}{ds}\right)^2 = \sum\left[\frac{d}{ds}\left(\frac{dx}{ds}\right)\right]^2 = \sum\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2,$$

oder

$$(6)\qquad \frac{1}{r} = +\sqrt{\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2}.$$

Da der ersten Krümmung nur ein absoluter Wert zukommt, so denkt man sich in (6) stets den positiven Wert der Wurzel gewählt.

---

1) siehe z. B. K. u. V. Kommerell, Theorie der Raumkurven und krummen Flächen, 4. Auflage 1931, 1. Band, § 3—5.

2) desgl. § 6.

Bezeichnet man mit $d\tau$ den Winkel zwischen der Schmiegungsebene in P und der darauffolgenden Schmiegungsebene im Punkt P′ der Kurve C (Torsionswinkel), so ist

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{d\tau}{ds}$$

die zweite Krümmung oder die Torsion im Punkte P.
Da die Binormale auf der Schmiegungsebene senkrecht steht, findet man

$$\frac{1}{\varrho^2} = \frac{d\tau^2}{ds^2} = \frac{d\lambda^2+d\mu^2+d\nu^2}{ds^2} = \frac{\Sigma d\lambda^2}{ds^2} = \sum\left(\frac{d\lambda}{ds}\right)^2,$$

oder nach einigen Umformungen [1])

$$(7) \qquad \frac{1}{\varrho} = r^2 \cdot \begin{vmatrix} \frac{dx}{ds} & \frac{dy}{ds} & \frac{dz}{ds} \\ \frac{d^2x}{ds^2} & \frac{d^2y}{ds^2} & \frac{d^2z}{ds^2} \\ \frac{d^3x}{ds^3} & \frac{d^3y}{ds^3} & \frac{d^3z}{ds^3} \end{vmatrix} = \frac{r^2}{ds^6} \cdot \begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ d^2x & d^2y & d^2z \\ d^3x & d^3y & d^3z \end{vmatrix}.$$

Die Torsion $\frac{1}{\varrho}$ hat nach (7) ein bestimmtes Vorzeichen.

§ 2. Die Methode von Bianchi.

Lie hat eine Methode angegeben, die gestattet, aus einer Kurve konstanter Torsion unendlich viele andere Kurven mit derselben konstanten Torsion herzuleiten; die so entstehenden Kurven haben das gleiche Bogenelement wie die gegebene Kurve, und lassen sich durch bloße Quadraturen aus einer von ihnen gewinnen. [2])

Von dieser Entdeckung macht Bianchi eine weitere Anwendung; er löst die Aufgabe, aus einer Kurve doppelter Krümmung unendlich viele andere Kurven durch Quadraturen abzuleiten, die gleiche Bogenlänge und gleiche Torsion wie die gegebene Kurve haben, deren Krümmung aber nach einem bestimmten Gesetz variiert [3]).

C sei irgend eine Kurve doppelter Krümmung mit der konstanten Torsion $\frac{1}{\varrho}$. Von jedem Punkt P dieser Kurve C trägt Bianchi

1) siehe z. B. K. und V. Kommerell, Theorie der Raumkurven und krummen Flächen, 4. Auflage 1931, 1. Band, S. 27—28.

2) S. Lie, Bestimmung aller Flächen konstanter Krümmung durch successive Quadraturen, Archiv for Mathematik og Naturvidenskab, Band V, S. 328—358, § 1, 1880.

3) L. Bianchi, Sulle curve a doppia curvatura, Giornale di Matematiche, Band 25, S. 222—233, § 1, 1883.

in der Schmiegungsebene S von P das konstante Stück ϱ unter dem Winkel ϑ gegen die Tangente in P ab. Wenn ϱ eine bestimmte Funktion des Bogens s der Kurve C ist, beschreibt der Endpunkt P_1 des Segmentes von der Länge ϱ eine Kurve C_1, deren laufende Koordinaten x_1, y_1, z_1 durch die Formeln bestimmt sind [1]):

$$(8) \qquad \begin{cases} x_1 = x + \varrho \cdot (\alpha \cos\vartheta + l \sin\vartheta), \\ y_1 = y + \varrho \cdot (\beta \cos\vartheta + m \sin\vartheta), \\ z_1 = z + \varrho \cdot (\gamma \cos\vartheta + n \sin\vartheta). \end{cases}$$

Es ergibt sich

$$\frac{dx_1}{ds} = \frac{dx}{ds} + \varrho \cdot \left[\cos\vartheta \cdot \frac{d\alpha}{ds} - \alpha \sin\vartheta \cdot \frac{d\vartheta}{ds} + \sin\vartheta \cdot \frac{dl}{ds} + l \cos\vartheta \cdot \frac{d\vartheta}{ds}\right],$$

oder mit Hilfe der Frenet'schen Formeln (5)

$$\frac{dx_1}{ds} = \alpha + \varrho \cdot \left[\left(\frac{d\vartheta}{ds} + \frac{1}{r}\right) \cdot (l \cos\vartheta - \alpha \sin\vartheta) + \frac{\lambda}{\varrho} \cdot \sin\vartheta\right].$$

Nach (2′) gilt, wenn s_1 der Bogen der Kurve C_1 ist:

$$\sum \left(\frac{dx_1}{ds}\right)^2 = \frac{\Sigma dx_1^2}{ds^2} = \frac{ds_1^2}{ds^2};$$

daher folgt mit Hilfe von (3)

$$\frac{ds_1^2}{ds^2} = 1 + \varrho^2 \cdot \left\{\frac{1}{r} + \frac{d\vartheta}{ds} - \frac{\sin\vartheta}{\varrho}\right\}^2,$$

oder

$$(9) \qquad ds_1^2 = \left[1 + \varrho^2 \cdot \left\{\frac{1}{r} + \frac{d\vartheta}{ds} - \frac{\sin\vartheta}{\varrho}\right\}^2\right] \cdot ds^2.$$

Wir bestimmen nun ϑ als Funktion von s derart, daß die Kurve C_1 dasselbe Bogenelement wie die Kurve C hat. Setzen wir fest, daß s_1 mit s wachsen soll, und bestimmen ϑ mit Hilfe der Differentialgleichung

$$(10) \qquad \frac{1}{r} + \frac{d\vartheta}{ds} - \frac{\sin\vartheta}{\varrho} = 0,$$

so werden die Bogenlängen beider Kurven zwischen entsprechenden Punkten einander gleich. Wir können daher $s_1 = s$ nehmen

---

1) Man vergleiche auch R. v. Lilienthal, Vorlesungen über Differentialgeometrie, Band I, S. 290–293, 1908. Jedoch sind seine Ausgangsformeln nicht richtig, wenn mit ϑ der Winkel zwischen dem Segment und der Hauptnormalen bezeichnet wird; vielmehr müssen die Gleichungen lauten

$$x_1 = x + \varrho \cdot (\alpha \sin\vartheta + l \cos\vartheta), \text{ — — —}.$$

Außerdem gebraucht v. Lilienthal beim weiteren Verlauf die Frenet'schen Formeln, die für ein Linkssystem gelten, während wir hier stets das Rechtssystem zugrundelegen.

und erhalten mit (10)

$$\frac{dx_1}{ds} = \alpha + \varrho \cdot \left[\frac{\sin\vartheta}{\varrho} \cdot (l\cos\vartheta - \alpha\sin\vartheta) + \frac{\lambda}{\varrho} \cdot \sin\vartheta\right],$$

oder

$$\frac{dx_1}{ds} = \alpha\cos^2\vartheta + l\sin\vartheta\cos\vartheta + \lambda\sin\vartheta. \tag{11}$$

Bei Beachtung der Frenet'schen Formeln und der Gleichung

$$\frac{d\vartheta}{ds} = \frac{\sin\vartheta}{\varrho} - \frac{1}{r}$$

folgt aus (11)

$$\frac{d^2x_1}{ds^2} = \left(\frac{1}{r} - \frac{2\sin\vartheta}{\rho}\right) \cdot (\alpha\sin\vartheta\cos\vartheta + l\sin^2\vartheta - \lambda\cos\vartheta). \tag{11'}$$

Nun gilt aber für die Krümmung $\frac{1}{r_1}$ der transformierten Kurve C_1 nach (6) unter Berücksichtigung von (3)

$$\frac{1}{r_1^2} = \sum\left(\frac{d^2x_1}{ds_1^2}\right)^2 = \sum\left(\frac{d^2x_1}{ds^2}\right)^2 = \left(\frac{1}{r} - \frac{2\sin\vartheta}{\varrho}\right)^2.$$

Ist nun ε gleich $+1$ oder gleich -1, je nachdem $\frac{1}{r} - \frac{2\sin\vartheta}{\varrho}$ positiv oder negativ ausfällt, so ergibt sich, da r_1 positiv sein muß, für die erste Krümmung der transformierten Kurve C_1

$$\frac{1}{r_1} = \varepsilon \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{2\sin\vartheta}{\varrho}\right). \tag{12}$$

Sind $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$; l_1, m_1, n_1; λ_1, μ_1, ν_1 die Richtungscosinus von Tangente, Hauptnormale und Binormale in einem Punkt P_1 der Kurve C_1, dann folgt aus (11) nach (4)

$$\alpha_1 = \alpha\cos^2\vartheta + l\sin\vartheta\cos\vartheta + \lambda\sin\vartheta, \tag{13}$$

und aus (11') und (12) nach (4)

$$l_1 = r_1 \cdot \frac{d^2x_1}{ds_1^2} = r_1 \cdot \frac{d^2x_1}{ds^2},$$

oder

$$l_1 = \varepsilon \cdot (\alpha\sin\vartheta\cos\vartheta + l\sin^2\vartheta - \lambda\cos\vartheta)\ ^1). \tag{14}$$

Nun sollen auch im Punkt P_1 (x_1, y_1, z_1) der Kurve C_1 Tangente, Hauptnormale und Binormale ein Rechtssystem bilden, daher ist in der orthogonalen Determinante

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ \lambda_1 & \mu_1 & \nu_1 \end{vmatrix} = +1$$

jedes Element gleich seiner Unterdeterminante und es gilt

$$\lambda_1 = \beta_1 n_1 - \gamma_1 m_1,$$

1) Die Formeln, die Bianchi in seiner Arbeit angegeben hat, gelten für ein Linkssystem.

oder nach (13) und (14)

$$\lambda_1 = -\varepsilon \cdot (\alpha \sin\vartheta - \mathfrak{l}\cos\vartheta). \tag{15}$$

Bei Beachtung von (5) folgt

$$\frac{d\lambda_1}{ds_1} = \frac{d\lambda_1}{ds} = -\varepsilon \cdot \left[\frac{d\vartheta}{ds} \cdot (\alpha\cos\vartheta + \mathfrak{l}\sin\vartheta) + \frac{1}{r} \cdot \sin\vartheta - \cos\vartheta \cdot \frac{d\mathfrak{l}}{ds}\right].$$

oder mit (10) und (14)

$$\frac{d\lambda_1}{ds} = -\frac{\varepsilon}{\varrho} \cdot (\alpha \sin\vartheta\cos\vartheta + \mathfrak{l}\sin^2\vartheta - \lambda\cos\vartheta) = -\frac{\mathfrak{l}_1}{\varrho};$$

andererseits gilt aber nach (5)

$$\frac{d\lambda_1}{ds_1} = \frac{d\lambda_1}{ds} = -\frac{\mathfrak{l}_1}{\varrho_1}.$$

Man hat daher:

$$\varrho_1 = +\varrho. \tag{16}$$

Die obigen Formeln liefern den wichtigen Satz:

Wird von jedem Punkt P einer Kurve der konstanten Torsion $\frac{1}{\varrho}$ in der Schmiegungsebene ein Segment der Länge $\varrho = PP_1$ abgetragen, das gegen die Kurve unter dem Winkel ϑ geneigt ist — ϑ genügt der Differentialgleichung —

$$\frac{1}{r} + \frac{d\vartheta}{ds} = \frac{\sin\vartheta}{\varrho} \tag{10}$$

so beschreibt der Endpunkt P_1 eine neue Kurve mit derselben Bogenlänge und derselben Torsion. Die erste Krümmung wird bestimmt durch die Gleichung

$$\frac{1}{r_1} = \left|\frac{1}{r} - \frac{2\sin\vartheta}{\varrho}\right|. \tag{12'}$$

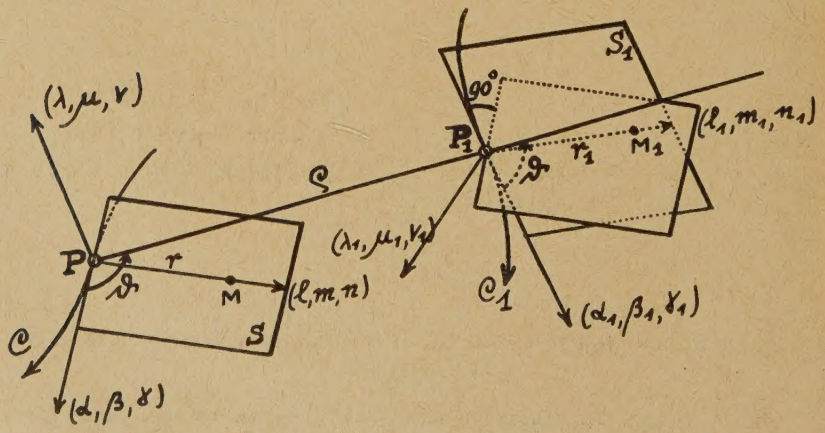

Fig. 1

Aus (15) folgt mit (3):

$$\lambda\lambda_1 + \mu\mu_1 + \nu\nu_1 = 0, \tag{17}$$

d. h. die Binormalen im Punkt P der gegebenen Kurve und im Punkt P_1 der transformierten Kurve — also auch die Schmiegungsebenen in entsprechenden Punkten — stehen aufeinander senkrecht.
Aus (8) und (13), bezw. (15) folgen mit (3) die Beziehungen:

$$\frac{x_1-x}{\varrho}\cdot\alpha_1 + \frac{y_1-y}{\varrho}\cdot\beta_1 + \frac{z_1-z}{\varrho}\cdot\gamma_1 = \cos\vartheta, \tag{17'}$$

$$\frac{x_1-x}{\varrho}\cdot\lambda_1 + \frac{y_1-y}{\varrho}\cdot\mu_1 + \frac{z_1-z}{\varrho}\cdot\nu_1 = 0; \tag{17''}$$

sie besagen, daß die Verbindungsgerade PP_1 entsprechender Punkte mit der transformierten Kurve C_1 denselben Winkel ϑ bildet wie mit der gegebenen Kurve C, und daß PP_1 auch in der Schmiegungsebene S_1 von P_1 liegt.

Diese Bemerkungen erlauben uns zu behaupten, dass, wenn wir auf eine der unendlich vielen Kurven C_1 dieselbe Transformation mit derselben Konstanten ϱ anwenden, unter ihren transformierten Kurven C_2 sicher die Ausgangskurve C zu finden ist.

§ 3. Die charakteristische Gleichung und ihre Lösung.

Unser Problem reduziert sich also auf die Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{d\vartheta}{ds} - \frac{\sin\vartheta}{\varrho} + \frac{1}{r} = 0. \tag{10}$$

Aus den bisherigen Betrachtungen ist folgendes festzuhalten:
Ist $\frac{1}{\varrho}$ die konstante Torsion, $\frac{1}{r}$ die Krümmung der Kurve C, $\vartheta = \vartheta(s)$ der Winkel, den die Verbindungsgerade entsprechender Punkte (P auf C und P_1 auf C_1) mit der Tangente in P an C bildet und genügt $\vartheta = \vartheta(s)$ der Differentialgleichung (10), so haben die transformierten Kurven C_1 dieselbe Torsion wie die Ausgangskurve C, sind also wiederum Kurven konstanter Torsion; ihre Krümmung $\frac{1}{r_1}$ ist dem absoluten Wert nach gegeben durch

$$\frac{1}{r_1} = \frac{1}{r} - \frac{2\sin\vartheta}{\varrho}.$$

Die Gleichung (10) nenne ich die „charakteristische Gleichung", da sie bei der Transformation der Kurven konstanter Torsion die wesentlichste Rolle spielt.

Setzt man $\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} = \vartheta_1$, also $\vartheta = 2 \cdot \operatorname{arctg}\vartheta_1$, so geht die charakteristische Gleichung (10) über in die Gleichung

$$\frac{d\vartheta_1}{ds} = -\frac{1}{2r}\cdot\vartheta_1^2 + \frac{1}{\varrho}\cdot\vartheta_1 - \frac{1}{2r}, \tag{18}$$

welche eine Riccati'sche Differentialgleichung darstellt; eine solche kann nur dann vollständig integriert werden, wenn von ihr ein partikuläres Integral bekannt ist. Ist ϑ_{10} ein Partikulärintegral von (18), so macht man, um zur allgemeinen Lösung zu gelangen, den Ansatz

$$\vartheta_1 = \vartheta_{10} + u, \tag{19}$$

wo u als Funktion von s zu bestimmen ist; für u ergibt sich die Bernoulli'sche Differentialgleichung

$$u' = \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{\vartheta_{10}}{r}\right)\cdot u - \frac{1}{2r}\cdot u^2,$$

die durch Multiplikation mit u^{-2} und der Substitution $\frac{1}{u} = v$ auf die lineare Differentialgleichung

$$v' + \left(\frac{1}{\varrho} - \frac{\vartheta_{10}}{r}\right)\cdot v = \frac{1}{2r}$$

gebracht werden kann.

Ist C eine Integrationskonstante, so ist das allgemeine Integral der linearen Differentialgleichung

$$v = e^{-\int\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{\vartheta_{10}}{r}\right)ds}\cdot\left[C + \int\frac{1}{2r}\cdot e^{\int\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{\vartheta_{10}}{r}\right)ds}\,ds\right].$$

Nach (19) ist somit

$$\vartheta_1 = \vartheta_{10} + \frac{e^{\int\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{\vartheta_{10}}{r}\right)ds}}{C + \int\frac{1}{2r}\cdot e^{\int\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{\vartheta_{10}}{r}\right)ds}\,ds}$$

das Integral der Riccati'schen Differentialgleichung (18) und das allgemeine Integral unserer charakteristischen Gleichung wird durch

$$\vartheta = 2\cdot\operatorname{arc\,tg}\left\{\vartheta_{10} + \frac{e^{\int\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{\vartheta_{10}}{r}\right)ds}}{C + \int\frac{1}{2r}\cdot e^{\int\left(\frac{1}{\varrho} - \frac{\vartheta_{10}}{r}\right)ds}\,ds}\right\} \tag{20}$$

dargestellt, wobei ϑ_{10} ein partikuläres Integral von (18) ist.

§ 4. Bianchis Lösung.

Der Weg, den Bianchi zur Lösung der charakteristischen Gleichung

$$\frac{d\vartheta}{ds}+\frac{1}{r}=\frac{\sin\vartheta}{\varrho} \tag{10}$$

einschlägt, ist im Vergleich zu dem in § 3 gegebenen etwas einfacher. Bianchi führt die charakteristische Gleichung (10) nicht in eine Riccati'sche Differentialgleichung über, sondern schließt folgendermaßen:[1])

Da die Gleichung (10) auf eine Riccati'sche Gleichung gebracht werden kann, und diese sich integrieren läßt, wenn ein partikuläres Integral von ihr bekannt ist, so gehört auch die Gleichung (10) zur Klasse derer, die sich integrieren lassen; ϑ_0 sei ein partikuläres Integral der charakteristischen Gleichung (10) und also nicht ein solches der daraus hervorgehenden Riccati'schen Differentialgleichung; dann gilt:

$$\frac{d\vartheta_0}{ds}+\frac{1}{r}=\frac{\sin\vartheta_0}{\varrho}; \tag{10'}$$

aus (10) und (10') folgt

$$\frac{d\vartheta}{ds}-\frac{d\vartheta_0}{ds}=\frac{d(\vartheta-\vartheta_0)}{ds}=\frac{1}{\varrho}\cdot(\sin\vartheta-\sin\vartheta_0),$$

oder

$$\frac{d(\vartheta-\vartheta_0)}{ds}=\frac{2}{\varrho}\cdot\cos\frac{\vartheta+\vartheta_0}{2}\cdot\sin\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2};$$

umgeformt

$$\frac{d(\vartheta-\vartheta_0)}{ds}=\frac{2}{\varrho}\cdot\left[\cos\vartheta_0\cdot\sin\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}\cdot\cos\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}-\sin\vartheta_0\cdot\sin^2\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}\right].$$

Bianchi setzt

$$\omega=\operatorname{cotg}\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}, \tag{21}$$

und erhält für ω die lineare Differentialgleichung

$$\frac{d\omega}{ds}+\frac{\cos\vartheta_0}{\varrho}\cdot\omega=\frac{\sin\vartheta_0}{\varrho},$$

deren allgemeines Integral durch

$$\omega=e^{-\int\frac{\cos\vartheta_0}{\varrho}ds}\cdot\left[C+\int\frac{\sin\vartheta_0}{\varrho}\cdot e^{\int\frac{\cos\vartheta_0}{\varrho}ds}ds\right] \tag{22}$$

gegeben ist, wobei C die Integrationskonstante bedeutet. Mit Hilfe

1) L. Bianchi, Sulle curve a doppia curvatura, Giornale di Matematiche, Band 25, Seite 222—233, § 2, 1883.

des partikulären Integrals ϑ_0 der Gleichung (10) wird dann das allgemeine Integral dieser charakteristischen Gleichung vermöge (21) und (22) in der Form

$$\vartheta = \vartheta_0 + 2 \cdot \operatorname{arc\,cotg}\, \omega ,$$

oder

$$(23) \quad \vartheta = \vartheta_0 + 2 \cdot \operatorname{arc\,cotg} \left\{ e^{-\int \frac{\cos \vartheta_0}{\varrho} ds} \cdot \left[C + \int \frac{\sin \vartheta_0}{\varrho} \cdot e^{\int \frac{\cos \vartheta_0}{\varrho} ds} ds \right] \right\}$$

dargestellt.

II. Kapitel.

Die Anwendung der Transformation von Bianchi auf die Schraubenlinie des Kreiszylinders.

§ 5. Die Ausgangskurve H_0, ihre Krümmung und ihre Torsion.

Bekanntlich ist jede Schraubenlinie auf einem Kreiszylinder eine Kurve konstanter Torsion. Die Gleichungen

$$\begin{cases} x = \cos u \\ y = \sin u \\ z = u \end{cases}$$

stellen eine Kreiszylinderschraubenlinie dar; zur Bestimmung der Bogenlänge s als Funktion des Parameters u gilt nach (2)

$$\frac{ds}{du} = + \sqrt{2} ,$$

also

$$s = \sqrt{2} \cdot u .$$

Für den Parameter u ergibt sich

$$u = \frac{s}{\sqrt{2}} ,$$

und

$$(24) \quad \begin{cases} x = \cos \dfrac{s}{\sqrt{2}} \\ y = \sin \dfrac{s}{\sqrt{2}} \\ z = \dfrac{s}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

sind die Gleichungen einer Kreiszylinderschraubenlinie, für welche der Parameter s die Bogenlänge bedeutet; wir können daher auf (24) die Transformation von Bianchi anwenden; (24) sei unsere Ausgangskurve — nennen wir sie kurz H_0.

Von ihr werde zunächst Krümmung und Torsion berechnet. Durch Differentiation nach dem Parameter s folgt

$$(25)\quad \begin{cases} \frac{dx}{ds} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \sin\frac{s}{\sqrt{2}}, & \frac{dy}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos\frac{s}{\sqrt{2}}, & \frac{dz}{ds} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \frac{d^2x}{ds^2} = -\frac{1}{2} \cdot \cos\frac{s}{\sqrt{2}}, & \frac{d^2y}{ds^2} = -\frac{1}{2} \cdot \sin\frac{s}{\sqrt{2}}, & \frac{d^2z}{ds^2} = 0, \\ \frac{d^3x}{ds^3} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \sin\frac{s}{\sqrt{2}}, & \frac{d^3y}{ds^3} = -\frac{1}{2\sqrt{2}} \cdot \cos\frac{s}{\sqrt{2}}, & \frac{d^3z}{ds^3} = 0. \end{cases}$$

Die Krümmung ist nach (6) und (25)

$$(26)\quad \frac{1}{r} = \frac{1}{2},$$

die Torsion nach (7) und (25)

$$(27)\quad \frac{1}{\varrho} = \frac{1}{2}.$$

§ 6. Lösung der charakteristischen Gleichung.

Wir wenden auf die Kreiszylinderschraubenlinie H_0 die Transformation von Bianchi an. Der in § 2 eingeführte Winkel $\vartheta = \vartheta(s)$ genügt nach (10) der Differentialgleichung

$$(10)\quad \frac{d\vartheta}{ds} - \frac{\sin\vartheta}{\varrho} + \frac{1}{r} = 0,$$

die vermöge (26) und (27) übergeht in

$$\frac{d\vartheta}{ds} = \frac{\sin\vartheta - 1}{2}.$$

Für $\vartheta \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ $(k = 0, 1, 2, 3, \cdots)$ ist daher

$$(28)\quad ds = \frac{d\vartheta}{\frac{\sin\vartheta - 1}{2}}.$$

Ein Weg zur Lösung dieser charakteristischen Gleichung ist folgender: Schreibt man

$$\sin\vartheta = 2\sin\frac{\vartheta}{2}\cos\frac{\vartheta}{2},$$

$$1 = \sin^2\frac{\vartheta}{2} + \cos^2\frac{\vartheta}{2},$$

so folgt

$$\sin\vartheta - 1 = -\left(\sin\frac{\vartheta}{2} - \cos\frac{\vartheta}{2}\right)^2,$$

oder[1])

$$\sin\vartheta - 1 = -2 \cdot \cos^2\left(\frac{\vartheta}{2} + \frac{\pi}{4}\right).$$

---

1) Es gelten die Relationen

$$\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2} \cdot \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right); \quad \cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2} \cdot \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right).$$

Dann liefert die Integration von (28)

$$s = -\int \frac{d\vartheta}{\cos^2\left(\frac{\vartheta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)} = -2\cdot \operatorname{tg}\left(\frac{\vartheta}{2}+\frac{\pi}{4}\right)+C,$$

wobei C die Integrationskonstante bedeutet, und es wird

$$\vartheta = 2\cdot \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{C-s}{2}\right)-\frac{\pi}{2}. \tag{29}$$

Damit haben wir den Winkel ϑ in der gewünschten Form $\vartheta = \vartheta(s)$.

§ 7. Die Gleichungen der ∞^1 transformierten Kurven H_1.

Die Gleichungen der transformierten Kurven sind durch (8) gegeben; α, β, γ bedeuten die Richtungscosinus der Tangente, l, m, n die der Hauptnormalen der Ausgangskurve H_0.
Mit (25) und (26) folgt aus (4)

$$\begin{cases} \alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot \sin\frac{s}{\sqrt{2}}, \beta = \frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \gamma = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ l = -\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \quad m = -\sin\frac{s}{\sqrt{2}}, \quad n = 0. \end{cases} \tag{30}$$

Aus (29) ergibt sich

$$\begin{cases} \sin\vartheta = \dfrac{\left(\frac{C-s}{2}\right)^2-1}{\left(\frac{C-s}{2}\right)^2+1}, \\ \cos\vartheta = 2\cdot\dfrac{\left(\frac{C-s}{2}\right)}{\left(\frac{C-s}{2}\right)^2+1}. \end{cases} \tag{31}$$

Damit werden die Gleichungen der ∞^1 Kurven (C ist die Konstante von § 6)

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{3-\left(\frac{C-s}{2}\right)^2}{1+\left(\frac{C-s}{2}\right)^2}\cdot\cos\frac{s}{\sqrt{2}} - \dfrac{2\sqrt{2}\cdot\left(\frac{C-s}{2}\right)}{1+\left(\frac{C-s}{2}\right)^2}\cdot\sin\frac{s}{\sqrt{2}}, \\ y_1 = \dfrac{3-\left(\frac{C-s}{2}\right)^2}{1+\left(\frac{C-s}{2}\right)^2}\cdot\sin\frac{s}{\sqrt{2}} + \dfrac{2\sqrt{2}\cdot\left(\frac{C-s}{2}\right)}{1+\left(\frac{C-s}{2}\right)^2}\cdot\cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \\ z_1 = \dfrac{s}{\sqrt{2}} + \dfrac{2\sqrt{2}\cdot\left(\frac{C-s}{2}\right)}{1+\left(\frac{C-s}{2}\right)^2}. \end{cases} \tag{32}$$

Aus der Kreiszylinderschraubenlinie, der Kurve H_0, hat man also ∞^1 neue Kurven, die Kurven H_1 erhalten. Diese transformierten Kurven H_1 haben dieselbe Bogenlänge wie die Ausgangskurve H_0, und sind wie diese, Kurven der konstanten Torsion $\frac{1}{2}$.[1])

§ 8. Die Rotation der transformierten Kurven H_1 um die z-Achse und die entstehenden Rotationsflächen R_1.

Auf den ersten Blick machen die Gleichungen (32) der ∞^1 transformierten Kurven H_1 einen wenig erfreulichen Eindruck; dessen ungeachtet ist es doch möglich, näheres über die Kurven H_1 und ihre Beziehung zueinander zu erfahren.

Um die ∞^1 Umdrehungsflächen, die durch Rotation der Kurven H_1 um die z-Achse als Rotationsachse entstehen, zu erhalten, bildet man aus (32)

$$x^2+y^2=\frac{1}{\left[1+\left(\frac{C-s}{2}\right)^2\right]^2}\cdot\left\{\left[3-\left(\frac{C-s}{2}\right)^2\right]^2+8\cdot\left(\frac{C-s}{2}\right)^2\right\}$$

$$=\frac{9+2\cdot\left(\frac{C-s}{2}\right)^2+\left(\frac{C-s}{2}\right)^4}{\left[1+\left(\frac{C-s}{2}\right)^2\right]^2}=1+\frac{8}{\left[1+\left(\frac{C-s}{2}\right)^2\right]^2}.$$

Dann sind

$$(33)\qquad \begin{cases} x^2+y^2=1+\dfrac{8}{\left[1+\left(\frac{C-s}{2}\right)^2\right]^2}, \\ z=\dfrac{s}{\sqrt{2}}+2\sqrt{2}\cdot\dfrac{\left(\frac{C-s}{2}\right)}{1+\left(\frac{C-s}{2}\right)^2} \end{cases}$$

die Gleichungen der gesuchten Rotationsflächen, die mit R_1 bezeichnet werden.

Die Elimination des Parameters s aus (33) liefert

$$\left[1+\left(\frac{C-s}{2}\right)^2\right]^2=\frac{8}{x^2+y^2-1},$$

oder

$$s=C\mp 2\cdot\sqrt{\sqrt{\frac{8}{x^2+y^2-1}}-1};$$

1) Sind (x, y, z) die Koordinaten unserer Ausgangskurve H_0 und (x_1, y_1, z_1) die der ∞^1 Transformierten H_1, so gilt (siehe Fig. 1):

$$(x_1-x)^2+(y_1-y)^2+(z_1-z)^2=\varrho^2=4.$$

damit werden die Gleichungen der Rotationsflächen R_1 in der Form $z = z\,(x, y, C)$

$$(34)\qquad z = \frac{C}{\sqrt{2}} \pm \left(-\sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{\frac{x^2 + y^2 - 1}{8}} - 1} + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{\frac{x^2 + y^2 - 1}{8}} - \frac{x^2 + y^2 - 1}{8}} \right).$$

Durch leichte Umformungen ergibt sich hieraus

$$(35)\qquad (x^2 + y^2 - 1) \cdot \left[\left(z - \frac{C}{\sqrt{2}} \right)^2 + (x^2 + y^2 + 9) \right]^2 = 32 \cdot (x^2 + y^2)^2.$$

§ 9. Untersuchung des Meridians der ∞^1 Rotationsflächen R_1.

Der Meridian der Rotationsflächen R_1 in der (xz)-Ebene ist gegeben durch die Gleichung

$$(36)\qquad \begin{cases} x = \pm \sqrt{1 + \dfrac{8}{\left[1 + \left(\dfrac{C - s}{2}\right)^2\right]^2}}, \\ z = \dfrac{s}{\sqrt{2}} + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \dfrac{\left(\dfrac{C - s}{2}\right)}{1 + \left(\dfrac{C - s}{2}\right)^2}. \end{cases}$$

Dabei bedeutet s den Parameter der Meridiankurven (Schnitt der Rotationsflächen (33) mit der (xz)-Ebene).

Auch die Gleichungen dieser Meridiankurven werden zweckmäßigerweise in die Form $z = z\,(x, C)$ übergeführt; dazu ist nur die Elimination von s aus den beiden Gleichungen (36) notwendig:

$$(37)\qquad z = \frac{C}{\sqrt{2}} \pm \left(-\sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{\frac{8}{x^2 - 1}} - 1} + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{\frac{x^2 - 1}{8}} - \frac{x^2 - 1}{8}} \right).$$

Diese Gleichung folgt direkt aus (34), wenn $y = o$ gesetzt wird.
Die ∞^1 Meridiankurven sind zur z-Achse symmetrisch, da die z-Achse Rotationsachse ist; x unterliegt der Bedingung

$$x^2 - 1 > o\,, \quad \text{oder} \quad |x| > 1\,,$$

und

$$\sqrt{\frac{8}{x^2 - 1}} \geqq 1\,, \quad \text{d. h.} \quad |x| \geqq 3\,.$$

Unsere sämtlichen Meridiankurven (C variabel) sind daher auf das Gebiet

$$|x| > 1\,, \quad |x| \leqq 3$$

beschränkt (siehe Fig. 4, Seite 17).

§ 10. Die transformierte Kurve H_1^0.

Von den ∞^1 transformierten Kurven H_1 der konstanten Torsion $1/2$ werde nun eine bestimmte eingehender diskutiert.
Nimmt man in den Gleichungen aller ∞^1 Kurven (32) den speziellen Wert $C = 0$, so ergibt sich aus der Gesamtheit dieser Kurven eine einzige — die Kurve H_1^0 — mit den Gleichungen:

$$(32') \quad \begin{cases} x_1^0 = \dfrac{3 - \frac{s^2}{4}}{1 + \frac{s^2}{4}} \cdot \cos \dfrac{s}{\sqrt{2}} + \dfrac{\sqrt{2}\, s}{1 + \frac{s^2}{4}} \cdot \sin \dfrac{s}{\sqrt{2}}, \\ y_1^0 = \dfrac{3 - \frac{s^2}{4}}{1 + \frac{s^2}{4}} \cdot \sin \dfrac{s}{\sqrt{2}} - \dfrac{\sqrt{2}\, s}{1 + \frac{s^2}{4}} \cdot \cos \dfrac{s}{\sqrt{2}}, \\ z_1^0 = \dfrac{s}{\sqrt{2}} - \dfrac{\sqrt{2}\, s}{1 + \frac{s^2}{4}}. \end{cases}$$

Figur 2 zeigt diese Kurve im Schrägbild, wobei, wie stets, ein Rechtssystem zu Grunde gelegt ist. Dreht man das (x, y, z)-System samt der Kurve H_1^0 um die z-Achse im Uhrzeigersinn, so entsteht Figur 3. Der punktierte Linienzug ist unsere Ausgangskurve H_0 — die Kreiszylinderschraubenlinie. Die Segmente in den Schmiegungsebenen, welche entsprechende Punkte der Schraubenlinie H_0 und der neuen Kurve konstanter Torsion H_1^0 verbinden, sind mit eingezeichnet.

§ 11. Die Rotationsfläche R_1^0.

Im folgenden untersuchen wir diejenige Rotationsfläche, auf der die Kurve H_1^0 liegt, d. h. die Fläche, die durch Drehung der Kurve (32') um die z-Achse entsteht. Alle ∞^1 Rotationsflächen R_1 sind durch die Gleichungen (34) gegeben; setzen wir hierin für die Konstante C den Wert 0 ein, so erhalten wir die gewünschte Rotationsfläche R_1^0. Da es sich aber um eine Umdrehungsfläche mit der z-Achse als Rotationsachse handelt, so genügt die Untersuchung der Meridiankurve dieser Fläche; es folgt aus (37)

$$(37') \quad z = \pm \left(-\sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{\frac{8}{x^2 - 1}} - 1} + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{\sqrt{\frac{x^2 - 1}{8}} - \frac{x^2 - 1}{8}} \right).$$

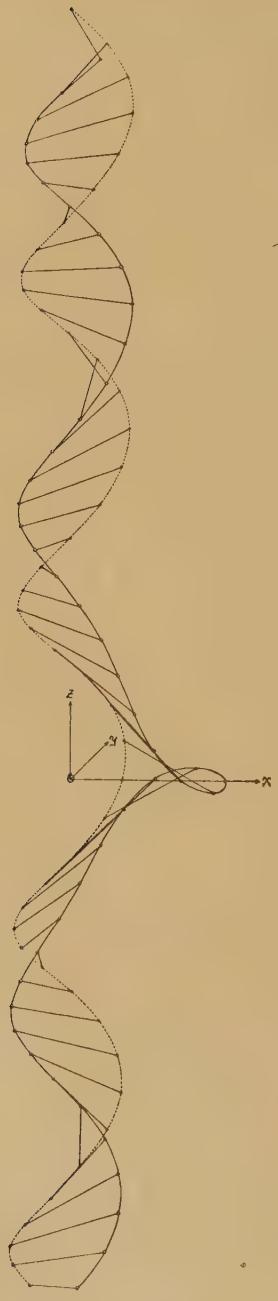

Fig. 2

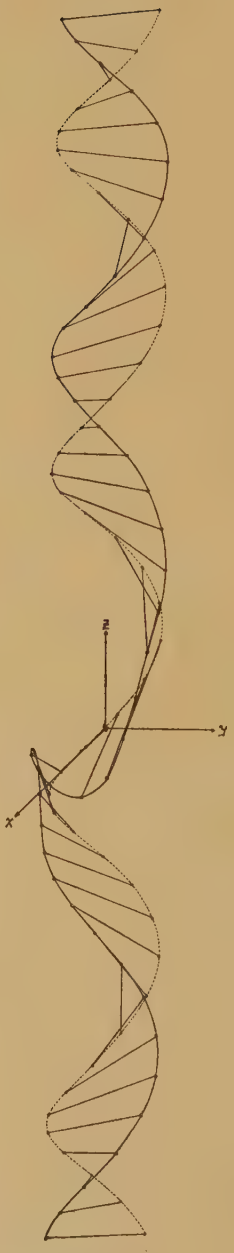

Fig. 3

In § 9 haben wir das Gebiet festgestellt, in dem die Meridiankurve liegen muß. Zu ihrer Konstruktion bedient man sich der Form (36) von § 9:

$$(36') \qquad \begin{cases} x = \pm\sqrt{1 + \dfrac{8}{\left(1+\frac{s^2}{4}\right)^2}}, \\ z = \dfrac{s}{\sqrt{2}} - \dfrac{\sqrt{2}\,s}{1+\frac{s^2}{4}}. \end{cases}$$

Die Rotationsfläche, die durch Drehung der Kurve H_1^0 um die z-Achse entsteht, hat nach (33) die Gleichungen

$$(33') \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 + \dfrac{8}{\left(1+\frac{s^2}{4}\right)^2}, \\ z = \dfrac{s}{\sqrt{2}} - \dfrac{\sqrt{2}\,s}{1+\frac{s^2}{4}}. \end{cases}$$

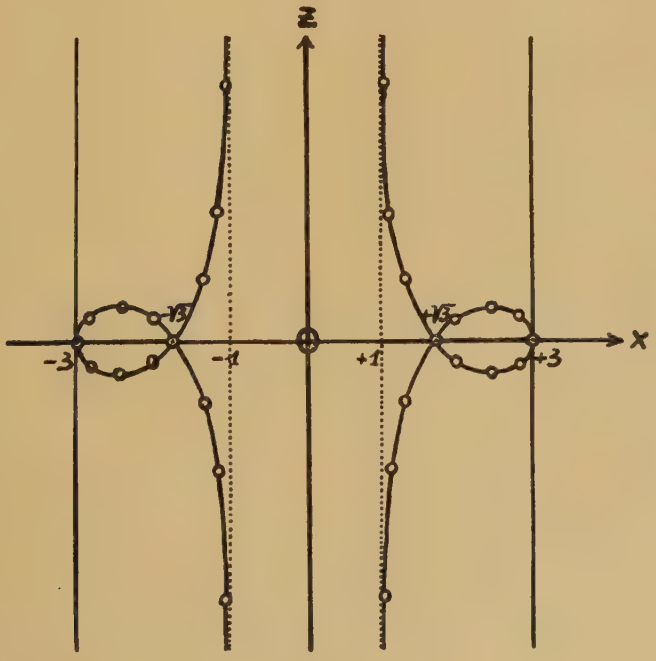

Fig. 4

Daher schneiden die Ebenen $z = \text{const}$ aus der Rotationsfläche Kreise aus, und $z = c$ ($c = \text{const}$) ergibt die Gleichung 3. Grads in s:

$$c = \frac{s}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}\, s}{1 + \frac{s^2}{4}},$$

oder

$$s^3 - \sqrt{2} \cdot c\, s^2 - 4s - 4\sqrt{2} \cdot c = 0. \tag{38}$$

Wir untersuchen, wie die Ebene $z = c$ aus dieser Rotationsfläche R_1^0 einen, zwei oder drei Kreise ausschneidet.
Bekanntlich läßt sich eine Gleichung 3. Grads in s auf eine solche reduzieren, in der das Glied mit s^2 fehlt; zu diesem Zweck macht man die Substitution

$$s - \frac{\sqrt{2} \cdot c}{3} = t;$$

mit

$$s = t + \frac{\sqrt{2} \cdot c}{3},$$

$$s^2 = t^2 + \frac{2\sqrt{2} \cdot c}{3} \cdot t + \frac{2c^2}{9},$$

$$s^3 = t^3 + \sqrt{2} \cdot c \cdot t^2 + \frac{2c^2}{3} \cdot t + \frac{2\sqrt{2} \cdot c^3}{27}$$

folgt dann aus (38)

$$t^3 + \left(-\frac{2c^2}{3} - 4\right) \cdot t + \left(-\frac{4\sqrt{2} \cdot c^3}{27} - \frac{16\sqrt{2} \cdot c}{3}\right) = 0.$$

Die Koeffizienten

$$\begin{cases} p = -\left(\frac{2c^2}{3} + 4\right), \\ q = -\frac{4\sqrt{2} \cdot c}{3} \cdot \left(\frac{c^2}{9} + 4\right) \end{cases}$$

sind reell. Die Frage nach der Realität der Wurzeln knüpft sich, wie bekannt ist, an die Diskriminante

$$D = 4p^3 + 27q^2,$$

oder

$$D = c^4 + 22c^2 - 4.$$

Drei Fälle sind zu unterscheiden:

1.) $D > 0$. Eine Wurzel ist reell, die beiden andern sind konjugiert imaginär.
2.) $D = 0$. Zwei Wurzeln werden gleich; alle drei Wurzeln sind reell.
3.) $D < 0$. Es muß notwendig $p < 0$ sein. — Die 3 Wurzeln erscheinen in imaginärer Form; nun hat aber eine Gleichung von ungeradem Grad mit reellen Koeffizienten

wenigstens eine reelle Wurzel, da sie die imaginären Wurzeln nur paarweise enthält. Leicht läßt sich nachweisen, daß dann alle drei Wurzeln reell und verschieden sind.

Wir lenken unser Hauptinteresse auf den zweiten Fall:

$$c^4 + 22\,c^2 - 4 = 0\,;$$

hieraus folgt

$$c^2 = -11 \pm \sqrt{11^2 + 4^2} = -11 \pm 5\cdot\sqrt{5},$$

oder

$$c = \pm\sqrt{-11 \overset{+}{(-)} 5\cdot\sqrt{5}}\ ^{1)} = \pm 0{,}425\,.$$

Für diesen Wert hat also die Gleichung (38) drei reelle Wurzeln, von denen zwei einander gleich sind. Daher schneiden die Ebenen $z = \pm\sqrt{-11 + 5\cdot\sqrt{5}}$ aus der Rotationsfläche R_1^0 zwei verschiedene Kreise aus.

Die Ebene $z = 0$ liefert aus (38)

$$s^3 - 4\,s = 0\ ,$$

d. h. also

$$1.)\ \ s = 0\ ;\ \ 2.)\ \ s = \pm 2\,.$$

Diese Werte geben aus (36′)

$$1.)\ x = \pm 3\,;\ \ 2.)\ x = \pm\sqrt{3},$$

und damit haben wir in der (xy)-Ebene die beiden Kreise:

$$\left\{\begin{matrix} x^2 + y^2 = 9 \\ z = 0 \end{matrix}\right\};\quad \left\{\begin{matrix} x^2 + y^2 = 3 \\ z = 0 \end{matrix}\right\},$$

wobei der zweite doppelt zu zählen ist.

Die Meridiankurve (36′) der Rotationsfläche R_1^0 schmiegt sich sehr bald ihren Asymptoten $x = \pm 1$ an.

Die Fig. 5 und 6 zeigen die Rotationsfläche R_1^0 im Schrägbild; die Kurve H_1^0, die durch Drehung um die z-Achse diese Fläche erzeugt, ist mit eingezeichnet.

§ 12. Die ∞^1 Rotationsflächen R_1 und ihre Beziehung zueinander.

Jede der ∞^1 transformierten Kurven H_1 erzeugt durch Drehung um die z-Achse eine Rotationsfläche R_1. Können diese ∞^1 Rotationsflächen durch irgend eine Bewegung im Raum ineinander übergeführt werden? Die Gleichung (34) gibt darüber Aufschluß: Ist eine der ∞^1 Rotationsflächen R_1, etwa die Rotationsfläche R_1^0 be-

1) Das eingeklammerte negative Zeichen ist nicht zu gebrauchen.

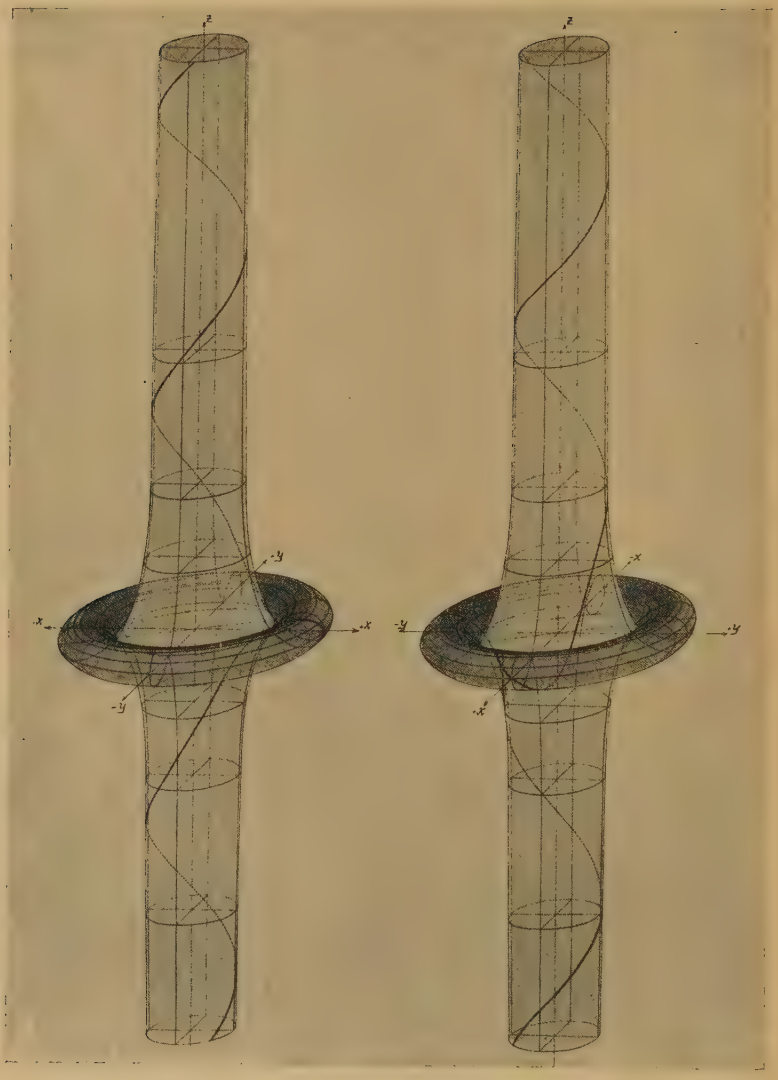

Fig. 5

Fig. 6

stimmt, so ergeben sich alle übrigen aus dieser durch Translation um den Betrag $\frac{C}{\sqrt{2}}$ entlang der z-Achse. Daher genügte es vollkommen, die Rotationsfläche R_1^0 näher zu untersuchen, was in § 11 geschehen ist.

§ 13. Die ∞^1 transformierten Kurven H_1 und ihre Beziehung zueinander.

In § 12 haben wir festgestellt, daß die Lage aller ∞^1 Rotationsflächen R_1 im Raum bekannt ist, wenn wir die Rotationsfläche R_1^0 für die Konstante $C = 0$ kennen. — Nun gehen wir zu den ∞^1 Kurven H_1 der konstanten Torsion $1/2$ über und stellen die Frage:

> Läßt sich zeigen, daß diese ∞^1 Kurven H_1 durch irgend eine Bewegung im Raum ineinander übergeführt werden können, und welcher Art ist diese Bewegung?

Nach § 12 vermutet man, daß die transformierten Kurven H_1 entweder durch Translation längs der z-Achse oder durch Schraubung um die z-Achse auseinander hervorgehen. Greift man aus der Schar der ∞^1 Kurven H_1 eine bestimmte — die Kurve H_1^0 — heraus, so wird im folgenden gezeigt, daß jede der unendlich vielen Kurven H_1 aus dieser Kurve H_1^0 durch Schraubung um die z-Achse erhalten werden kann.

Jede Schraubung um eine Achse läßt sich aus einer Translation t in Richtung der Achse und einer reinen Drehung um den Winkel ω um diese Achse zusammensetzen. — Gelingt es daher, diese Translation t und diesen Drehwinkel ω als Funktionen der Konstanten C zu finden, so kann aus der gezeichneten Kurve H_1^0 für $C = 0$ sofort die Kurve H_1^C für die Konstante C erhalten werden: man verschiebt die Kurve H_1^0 um den Betrag $t = t\,(C)$ in Richtung der Achse und dreht um den Winkel $\omega = \omega\,(C)$ um diese Achse.

Wir gehen von der Kurve H_1^0 aus; diese unterwirft man einer beliebigen, ganz willkürlichen Schraubung $(t + \omega)$ um die z-Achse. Die Translation t in Richtung dieser Achse führt einen beliebigen Punkt (x_1^0, y_1^0, z_1^0) der Kurve H_1^0 über in den Punkt:

$$X = x_1^0,\ Y = y_1^0,\ Z = z_1^0 + t\,.$$

Aus (X, Y, Z) entsteht durch Drehung um die z-Achse um den Winkel

ω (Drehwinkel) der Punkt:

$$\begin{cases} x = X\cos\omega + Y\sin\omega\ , \\ y = Y\cos\omega - X\sin\omega\ , \\ z = Z\ . \end{cases}$$

Daher geht $(x_1^0,\ y_1^0,\ z_1^0)$ der Kurve H_1^0 durch die Schraubung $(t + \omega)$ über in:

$$\begin{cases} x = x_1^0\cos\omega + y_1^0\sin\omega\ , \\ y = y_1^0\cos\omega + y_1^0\sin\omega\ , \\ z = z_1^0 + t\ . \end{cases}$$

Mit (32′) folgt dann für die durch Schraubung entstandene Kurve

$$(39)\qquad \begin{cases} x = \dfrac{3 - \frac{s^2}{4}}{1 + \frac{s^2}{4}}\cdot\cos\left(\dfrac{s}{\sqrt{2}} - \omega\right) + \dfrac{\sqrt{2}\cdot s}{1 + \frac{s^2}{4}}\cdot\sin\left(\dfrac{s}{\sqrt{2}} - \omega\right), \\ y = \dfrac{3 - \frac{s^2}{4}}{1 + \frac{s^2}{4}}\cdot\sin\left(\dfrac{s}{\sqrt{2}} - \omega\right) - \dfrac{\sqrt{2}\cdot s}{1 + \frac{s^2}{4}}\cdot\cos\left(\dfrac{s}{\sqrt{2}} - \omega\right), \\ z = t + \dfrac{s}{\sqrt{2}} - \dfrac{\sqrt{2}\cdot s}{1 + \frac{s^2}{4}}\cdot \end{cases}$$

Diese durch die Schraubung $(t + \omega)$ aus der Kurve H_1^0 hervorgegangene Kurve (39) soll nun mit einer unserer ∞^1 Kurven H_1 der konstanten Torsion $\frac{1}{2}$ identisch sein. Es ist klar, daß sich die Parameter s der Kurve (39) und s′ der bestimmten Kurve

$$(32)\qquad \begin{cases} x_1 = \dfrac{3 - \left(\frac{C - s'}{2}\right)^2}{1 + \left(\frac{C - s'}{2}\right)^2}\cdot\cos\dfrac{s'}{\sqrt{2}} - \dfrac{2\sqrt{2}\cdot\left(\frac{C - s'}{2}\right)}{1 + \left(\frac{C - s'}{2}\right)^2}\cdot\sin\dfrac{s'}{\sqrt{2}}, \\ y_1 = \dfrac{3 - \left(\frac{C - s'}{2}\right)^2}{1 + \left(\frac{C - s'}{2}\right)^2}\cdot\sin\dfrac{s'}{\sqrt{2}} + \dfrac{2\sqrt{2}\cdot\left(\frac{C - s'}{2}\right)}{1 + \left(\frac{C - s'}{2}\right)^2}\cdot\cos\dfrac{s'}{\sqrt{2}}, \\ z_1 = \dfrac{s'}{\sqrt{2}} + \dfrac{2\sqrt{2}\cdot\left(\frac{C - s'}{2}\right)}{1 + \left(\frac{C - s'}{2}\right)^2} \end{cases}$$

aus der Schar der unendlich vielen um die Konstante C unterscheiden:

$$s' = s + C,$$

oder

$$s = s' - C.$$

Damit wird die durch Schraubung entstandene Kurve (39):

$$x = \frac{3-\left(\frac{C-s'}{2}\right)^2}{1+\left(\frac{C-s'}{2}\right)^2}\cdot\cos\left(\frac{s'}{\sqrt{2}}-\frac{C}{\sqrt{2}}-\omega\right)-\frac{2\sqrt{2}\cdot\left(\frac{C-s'}{2}\right)}{1+\left(\frac{C-s'}{2}\right)^2}\cdot\sin\left(\frac{s'}{\sqrt{2}}-\frac{C}{\sqrt{2}}-\omega\right),$$

$$y = \frac{3-\left(\frac{C-s'}{2}\right)^2}{1+\left(\frac{C-s'}{2}\right)^2}\cdot\sin\left(\frac{s'}{\sqrt{2}}-\frac{C}{\sqrt{2}}-\omega\right)+\frac{2\sqrt{2}\cdot\left(\frac{C-s'}{2}\right)}{1+\left(\frac{C-s'}{2}\right)^2}\cdot\cos\left(\frac{s'}{\sqrt{2}}-\frac{C}{\sqrt{2}}-\omega\right),$$

$$z = t+\frac{s'}{\sqrt{2}}-\frac{C}{\sqrt{2}}+\frac{2\sqrt{2}\cdot\left(\frac{C-s'}{2}\right)}{1+\left(\frac{C-s'}{2}\right)^2}.$$

Nun soll aber diese Kurve identisch sein mit Kurve (32), daher hat man für die Translation t und den Drehwinkel ω durch Vergleich der beiden

$$\begin{cases} t-\frac{C}{\sqrt{2}}=0, \\ -\frac{C}{\sqrt{2}}-\omega=0, \end{cases}$$

oder

$$t=\frac{C}{\sqrt{2}},\ \omega=-\frac{C}{\sqrt{2}}. \tag{40}$$

Um also von der gezeichneten Kurve H_1^0 für den Wert C = O zur Kurve H_1^C für den bestimmten Wert C zu kommen, hat man auf H_1^0 die Translation $t=\frac{C}{\sqrt{2}}$ in Richtung der z-Achse auszuführen und um den Winkel $\omega=\frac{C}{\sqrt{2}}$ entgegen dem Uhrzeigersinn um die z-Achse zu drehen.

In Abb. 7 sind die aus der Kreiszylinderschraubenlinie H_0 transformierten Kurven H_1 für die speziellen Zahlenwerte

$$C=0,\ 2,\ 4,\ 6$$

samt den zugehörigen Rotationsflächen R_1 dargestellt. Diese Abbildung zeigt mit aller wünschenswerten Deutlichkeit, daß die Kurven H_1 durch Schraubung um die z-Achse auseinander hervorgehen; auf Abb. 7 ist die Translation $t=\frac{C}{\sqrt{2}}$ im Aufriss, der Drehwinkel $\omega=-\frac{C}{\sqrt{2}}$ im Grundriss zu sehen. Besonders eindrucksvoll tritt

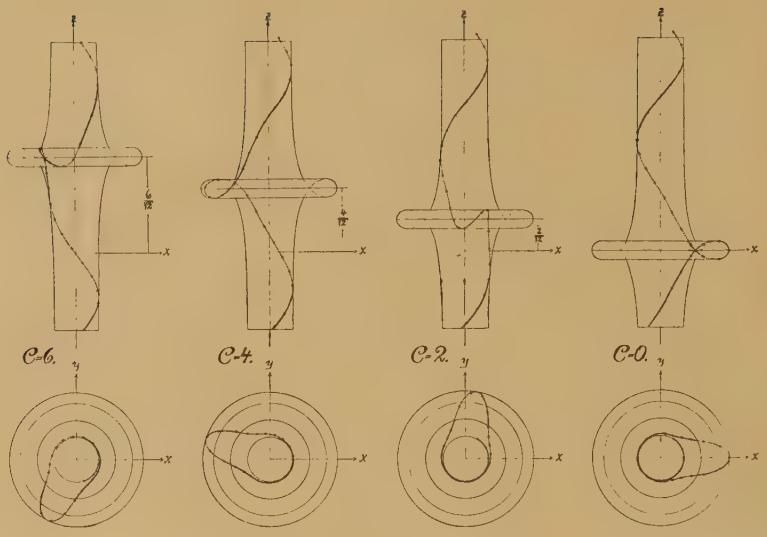

Abb. 7

diese Drehung um die z-Achse in Fig. 8 in Erscheinung. — Die unendlich vielen Punkte für den Parameterwert s = o liegen auf einem Kreis, der sich in die (x y) — Ebene als Ellipse projiziert, die mit eingezeichnet ist.

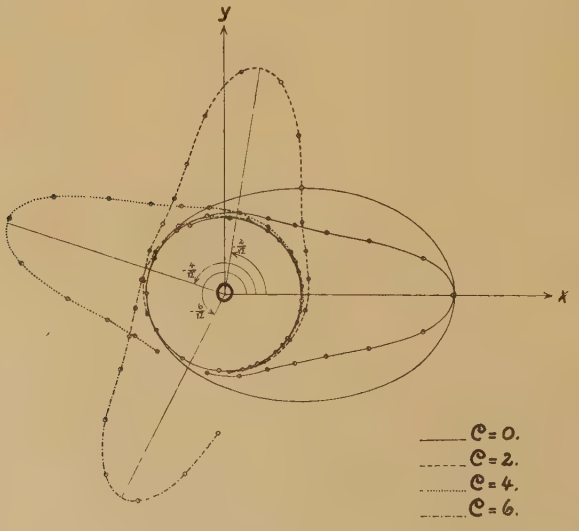

Fig. 8

III. Kapitel.

Die wiederholte Anwendung der Bianchi'schen Transformation.

§ 14. Die Ausgangskurve H_1^0 und ihre Krümmung.

Dadurch, daß wir auf die Kreiszylinderschraubenlinie H_0 der konstanten Torsion $^1/_2$ die Transformation von Bianchi anwendeten, erhielten wir ∞^1 neue Kurven H_1 derselben Torsion mit den Gleichungen (32). Der Wert $C = 0$ lieferte die Kurve H_1^0, die wir neuerdings als Ausgangskurve wählen.

Die Krümmung der ∞^1 Kurven H_1 wird nach (12) bei Beachtung von (26), (27) und (31)

$$\frac{1}{r_1} = \frac{s}{2} \cdot \frac{3 - \left(\frac{C-s}{2}\right)^2}{1 + \left(\frac{C-s}{2}\right)^2},$$

also die der Kurve H_1^0

$$\frac{1}{r_1^0} = \left| \frac{s^2 - 12}{2 \cdot (s^2 + 4)} \right|; \tag{41}$$

ihre Torsion ist

$$\frac{1}{\varrho_1^0} = \frac{1}{2}. \tag{42}$$

§ 15. Die charakteristische Gleichung und das Partikulärintegral.

Für die Kurve H_1^0 lautet die charakteristische Gleichung nach (10)

$$\frac{d\vartheta}{ds} + \frac{1}{r_1^0} - \frac{\sin\vartheta}{\varrho_1^0} = 0,$$

oder

$$\frac{d\vartheta}{ds} - \frac{\sin\vartheta}{2} = \frac{12 - s^2}{2 \cdot (s^2 + 4)}; \tag{43}$$

sie kann vermöge der Substitution $\operatorname{tg}\frac{\vartheta}{2} = \vartheta_1$ in die Riccati'sche

Differentialgleichung

$$\frac{d\vartheta_1}{ds} = \frac{12 - s^2}{4 \cdot (s^2 + 4)} \cdot \vartheta_1^2 + \frac{1}{2} \cdot \vartheta_1 + \frac{12 - s^2}{4 \cdot (s^2 + 4)}$$

übergeführt werden, und jede solche läßt sich lösen, wenn von ihr ein partikuläres Integral bekannt ist. — Statt dessen kann auch Gleichung (43) direkt gelöst werden, wenn von ihr eine partikuläre Lösung vorliegt. Um sie zu erhalten, führen wir uns nochmals die Entstehungsweise der transformierten Kurven vor Augen:

Wir haben die Transformation von Bianchi auf die Kreiszylinderschraubenlinie H_0 der konstanten Torsion $1/2$ angewendet und die ∞^1 neuen Kurven H_1 derselben Torsion erhalten. Auf eine dieser Kurven H_1 — die Kurve H_1^0 — wenden wir erneut diese Transformation an, und erhalten wiederum ∞^1 Kurven derselben konstanten Torsion; wir bezeichnen sie mit H_2. Unter diesen ∞^1 Kurven H_2 befindet sich die Kreiszylinderschraubenlinie H_0; aus ihr ging die Kurve H_1^0 hervor; also muß unter den ∞^1 Transformierten der Kurve H_1^0 die Kurve H_0 zu finden sein (man beachte die Bemerkung am Ende des § 2).

Dieser Gedankengang liefert das partikuläre Integral

$$\cos\vartheta_0 = \frac{s}{\frac{s^2}{4} + 1}, \quad \sin\vartheta_0 = \frac{\frac{s^2}{4} - 1}{\frac{s^2}{4} + 1}, \tag{44}$$

welches die charakteristische Gleichung (43) befriedigt.

§ 16. Lösung der charakteristischen Gleichung.

Nach § 4 ist das allgemeine Integral der charakteristischen Gleichung durch (23) gegeben, wobei ϑ_0 das Partikulärintegral (44) der Gleichung (43) und C eine Integrationskonstante bedeutet. Mit

$$\vartheta_0 = \arccos \frac{s}{\frac{s^2}{4} + 1}$$

folgt für die allgemeine Lösung der charakteristischen Gleichung (43) aus (23):

$$\vartheta = \arccos \frac{4s}{s^2 + 4} + 2 \cdot \operatorname{arc\,cotg} \frac{C - 2s + \frac{s^3}{6}}{s^2 + 4}. \tag{45}$$

§ 17. Die Gleichungen der ∞^1 transformierten Kurven H_2.

Man berechnet aus (45) $\cos\vartheta$ und $\sin\vartheta$:

$$(46)\quad \begin{cases} \cos\vartheta = \dfrac{4s\cdot\left[\left(C-2s+\frac{s^3}{6}\right)^2-(s^2+4)^2\right]-2\cdot(s^4-16)\cdot\left(C-2s+\frac{s^3}{6}\right)}{(s^2+4)\cdot\left[\left(C-2s+\frac{s^3}{6}\right)^2+(s^2+4)^2\right]}, \\ \sin\vartheta = -\dfrac{(s^2-4)\cdot\left[\left(C-2s+\frac{s^3}{6}\right)^2-(s^2+4)^2\right]+8s\cdot(s^2+4)\cdot\left(C-2s+\frac{s^3}{6}\right)}{(s^2+4)\cdot\left[\left(C-2s+\frac{s^3}{6}\right)^2+(s^2+4)^2\right]}. \end{cases}$$

Sind (x_1^0, y_1^0, z_1^0) die Koordinaten der Kurve H_1^0, so werden nach Bianchi die Gleichungen der ∞^1 Transformierten H_2

$$(8')\quad \begin{cases} x_2 = x_1^0 + \varrho_1\cdot(\alpha_1^0\cos\vartheta + l_1^0\sin\vartheta), \\ y_2 = y_1^0 + \varrho_1\cdot(\beta_1^0\cos\vartheta + m_1^0\sin\vartheta), \\ z_2 = z_1^0 + \varrho_1\cdot(\gamma_1^0\cos\vartheta + n_1^0\sin\vartheta), \end{cases}$$

wobei $(\alpha_1^0, \beta_1^0, \gamma_1^0)$ die Richtungscosinus der Tangente, (l_1^0, m_1^0, n_1^0) die der Hauptnormalen der Kurve H_1^0 bedeuten; da wir auf H_1^0 die gleiche Transformation wie auf H_0 mit derselben Konstanten $\varrho = 2$ anwenden, ist

$$\varrho_1 = \varrho = 2.$$

Aus (32') folgt

$$(47)\quad \begin{cases} \alpha_1^0 = \dfrac{dx_1^0}{ds} = \dfrac{s\cdot\left(\frac{s^2}{4}-1\right)}{\left(1+\frac{s^2}{4}\right)^2}\cdot\cos\dfrac{s}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\frac{s^4}{16}-s^2-1}{\left(1+\frac{s^2}{4}\right)^2}\cdot\sin\dfrac{s}{\sqrt{2}}, \\ \beta_1^0 = \dfrac{dy_1^0}{ds} = \dfrac{s\cdot\left(\frac{s^2}{4}-1\right)}{\left(1+\frac{s^2}{4}\right)^2}\cdot\sin\dfrac{s}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\frac{s^4}{16}-s^2-1}{\left(1+\frac{s^2}{4}\right)^2}\cdot\cos\dfrac{s}{\sqrt{2}}, \\ \gamma_1^0 = \dfrac{dz_1^0}{ds} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\dfrac{\frac{s^4}{16}+s^2-1}{\left(1+\frac{s^2}{4}\right)^2}, \end{cases}$$

und

$$(47')\quad \begin{cases} l_1^0 = r_1^0 \cdot \dfrac{d^2x_1^0}{ds^2} = \dfrac{\left(\frac{s^2}{4}-1\right)^2}{\left(1+\frac{s^2}{4}\right)^2} \cdot \cos\dfrac{s}{\sqrt{2}} - \dfrac{s^2}{4} \cdot \dfrac{\sqrt{2}\cdot s}{\left(1+\frac{s^2}{4}\right)^2} \cdot \sin\dfrac{s}{\sqrt{2}}, \\ m_1^0 = r_1^0 \cdot \dfrac{d^2y_1^0}{ds^2} = \dfrac{\left(\frac{s^2}{4}-1\right)^2}{\left(1+\frac{s^2}{4}\right)^2} \cdot \sin\dfrac{s}{\sqrt{2}} + \dfrac{s^2}{4} \cdot \dfrac{\sqrt{2}\cdot s}{\left(1+\frac{s^2}{4}\right)^2} \cdot \cos\dfrac{s}{\sqrt{2}}, \\ n_1^0 = r_1^0 \cdot \dfrac{d^2z_1^0}{ds^2} = \dfrac{\sqrt{2}\cdot s}{\left(1+\frac{s^2}{4}\right)^2}. \end{cases}$$

Damit werden nach (8′) die Gleichungen[1]) der transformierten Kurven H_2 mit der konstanten Torsion $^1/_2$ (C ist die Konstante von § 16)

$$(48)\quad \begin{cases} x_2 = \dfrac{(s^2+4)\cdot(20-3s^2) + \left(C-2s+\frac{s^3}{6}\right)^2}{(s^2+4)^2+\left(C-2s+\frac{s^3}{6}\right)^2} \cdot \cos\dfrac{s}{\sqrt{2}} \\ \quad + \dfrac{2\sqrt{2}\cdot(s^2+4)\cdot\left[4s-\left(C-2s+\frac{s^3}{6}\right)\right]}{(s^2+4)^2+\left(C-2s+\frac{s^3}{6}\right)^2} \cdot \sin\dfrac{s}{\sqrt{2}}, \\ y_2 = \dfrac{(s^2+4)\cdot(20-3s^2) + \left(C-2s+\frac{s^3}{6}\right)^2}{(s^2+4)^2+\left(C-2s+\frac{s^3}{6}\right)^2} \cdot \sin\dfrac{s}{\sqrt{2}} \\ \quad - \dfrac{2\sqrt{2}\cdot(s^2+4)\cdot\left[4s-\left(C-2s+\frac{s^3}{6}\right)\right]}{(s^2+4)^2+\left(C-2s+\frac{s^3}{6}\right)^2} \cdot \cos\dfrac{s}{\sqrt{2}}, \\ z_2 = \dfrac{s}{\sqrt{2}} - \dfrac{2\sqrt{2}\cdot(s^2+4)\cdot\left[4s+\left(C-2s+\frac{s^3}{6}\right)\right]}{(s^2+4)^2+\left(C-2s+\frac{s^3}{6}\right)^2}. \end{cases}$$

---

1) Sind (x_1^0, y_1^0, z_1^0) die Koordinaten der Ausgangskurve H_1^0 und (x_2, y_2, z_2) die der ∞^1 Transformierten H_2, so gilt gemäß der Methode von Bianchi

$$(x_2-x_1^0)^2 + (y_2-y_1^0)^2 + (z_2-z_1^0)^2 = 4,$$

was mit (48) und (32′) bestätigt werden kann.

Setzen wir

$$\cos\vartheta = \frac{s}{\frac{s^2}{4}+1}, \quad \sin\vartheta = \frac{\frac{s^2}{4}-1}{\frac{s^2}{4}+1}$$

in die Gleichungen (8′) ein, so erhalten wir aus der Gesamtheit der ∞^1 Kurven H_2 eine einzige; bei dieser Wahl von ϑ ergibt sich — was durch Rechnung gezeigt werden kann — tatsächlich die Kurve H_0 (Kreiszylinderschraubenlinie) mit den Gleichungen

$$x_2 = \cos\frac{s}{\sqrt{2}}, \quad y_2 = \sin\frac{s}{\sqrt{2}}, \quad z_2 = \frac{s}{\sqrt{2}}.$$

§ 18. Die transformierte Kurve H_2^0.

Die Gleichungen (48) geben die ∞^1 Kurven H_2 der konstanten Torsion $^1/_2$. Für jeden Wert von C erhält man eine bestimmte Kurve, für C = O die Kurve H_2^0 mit den Gleichungen

$$\left\{\begin{aligned}
x_2^0 &= \frac{(s^2+4)\cdot(20-3s^2)+s^2\cdot\left(\frac{s^2}{6}-2\right)^2}{(s^2+4)^2+s^2\cdot\left(\frac{s^2}{6}-2\right)^2}\cdot\cos\frac{s}{\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{2}\cdot s\cdot(s^2+4)\cdot\left(\frac{s^2}{6}-6\right)}{(s^2+4)^2+s^2\cdot\left(\frac{s^2}{6}-2\right)^2}\cdot\sin\frac{s}{\sqrt{2}} \\
y_2^0 &= \frac{(s^2+4)\cdot(20-3s^2)+s^2\cdot\left(\frac{s^2}{6}-2\right)^2}{(s^2+4)^2+s^2\cdot\left(\frac{s^2}{6}-2\right)^2}\cdot\sin\frac{s}{\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{2}\cdot s\cdot(s^2+4)\cdot\left(\frac{s^2}{6}-6\right)}{(s^2+4)^2+s^2\cdot\left(\frac{s^2}{6}-2\right)^2}\cdot\cos\frac{s}{\sqrt{2}} \\
z_2^0 &= \frac{s}{\sqrt{2}} - \frac{2\sqrt{2}\cdot s\cdot(s^2+4)\cdot\left(\frac{s^2}{6}+2\right)}{(s^2+4)^2+s^2\cdot\left(\frac{s^2}{6}-2\right)^2}.
\end{aligned}\right.$$

Figur 9 zeigt diese Kurve im Schrägbild; Figur 10 entsteht hieraus durch Drehung des (x, y, z)-Systems um die z-Achse im Uhrzeigersinn. Der in diesen Abbildungen punktierte Linienzug ist unsere jetzige Ausgangskurve H_1^0, die in den Abbildungen 2 und 3 die Transformierte der Kreiszylinderschraubenlinie H_0 war. Die Segmente in den Schmiegungsebenen, welche entsprechende Punkte der Kurven H_1^0 und H_2^0 verbinden, sind mit eingezeichnet.

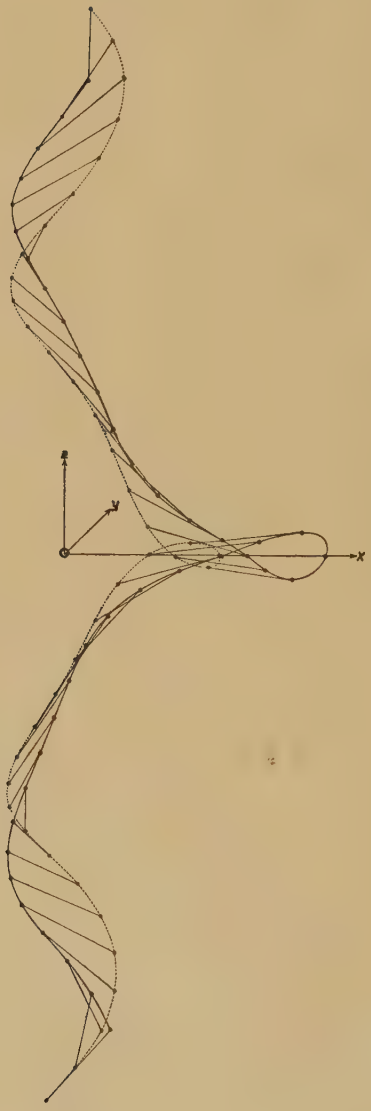

Fig. 9

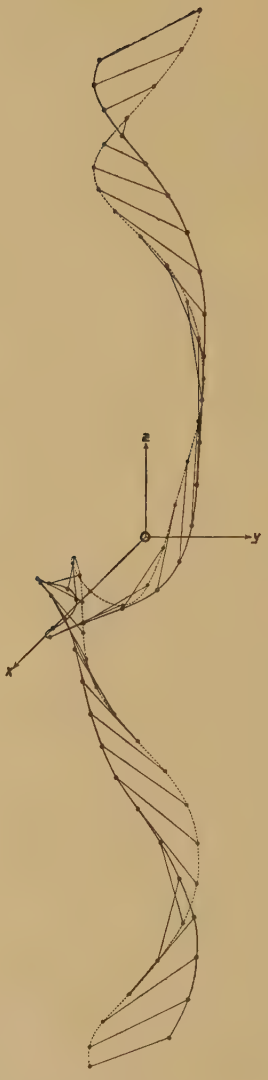

Fig. 10

§ 19. Die transformierten Kurven H_2^2, H_2^4, H_2^6.

Setzt man in den Gleichungen (48) für die Konstante C den Wert C = 2, so ergibt sich aus der Gesamtheit der Kurven H_2 die Kurve H_2^2 mit den Gleichungen

$$
(48'')\quad
\begin{cases}
x_2^2 = \dfrac{(s^2+4)\cdot(20-3s^2)+\left(\frac{s^3}{6}-2s+2\right)^2}{(s^2+4)^2+\left(\frac{s^3}{6}-2s+2\right)^2}\cdot\cos\dfrac{s}{\sqrt{2}} \\
\qquad +\dfrac{2\sqrt{2}\cdot(s^2+4)\cdot\left[4s-\left(\frac{s^3}{6}-2s+2\right)\right]}{(s^2+4)^2+\left(\frac{s^3}{6}-2s+2\right)^2}\cdot\sin\dfrac{s}{\sqrt{2}}, \\
y_2^2 = \dfrac{(s^2+4)\cdot(20-3s^2)+\left(\frac{s^3}{6}-2s+2\right)^2}{(s^2+4)^2+\left(\frac{s^3}{6}-2s+2\right)^2}\cdot\sin\dfrac{s}{\sqrt{2}} \\
\qquad -\dfrac{2\sqrt{2}\cdot(s^2+4)\cdot\left[4s-\left(\frac{s^3}{6}-2s+2\right)\right]}{(s^2+4)^2+\left(\frac{s^3}{6}-2s+2\right)^2}\cdot\cos\dfrac{s}{\sqrt{2}}, \\
z_2^2 = \dfrac{s}{\sqrt{2}}-\dfrac{2\sqrt{2}\cdot(s^2+4)\cdot\left[4s+\left(\frac{s^3}{6}-2s+2\right)\right]}{(s^2+4)^2+\left(\frac{s^3}{6}-2s+2\right)^2}.
\end{cases}
$$

Für C = 4, C = 6 erhält man entsprechend (48″) die beiden Kurven H_2^4, H_2^6.

Abb. 11 gibt die Kurven H_2^0, H_2^2, H_2^4, H_2^6 im Schrägbild wieder, desgl. Abb. 12, bei der das (x, y, z)-System um die z-Achse im Uhrzeigersinn gedreht ist; mit eingezeichnet sind die Projektionen dieser Kurven konstanter Torsion auf die (x y)-Ebene. Abb. 13 zeigt diese Kurven in Grund- und Aufriß.

§ 20. Die ∞^1 transformierten Kurven H_2.

In § 13 konnten wir nachweisen, daß alle Kurven H_1 durch Schraubung um die z-Achse aus der Kurve H_1^0 hervorgehen, daß also die Anwendung der Transformation von Bianchi auf die Kreiszylinderschraubenlinie H_0 im wesentlichen nur eine neue Kurve konstanter Torsion liefert. Die Abbildungen 11 — 13 zeigen deutlich, daß die Kurven H_2 weder durch eine Schraubung, noch durch irgendeine andere Bewegung ineinander übergeführt werden können.

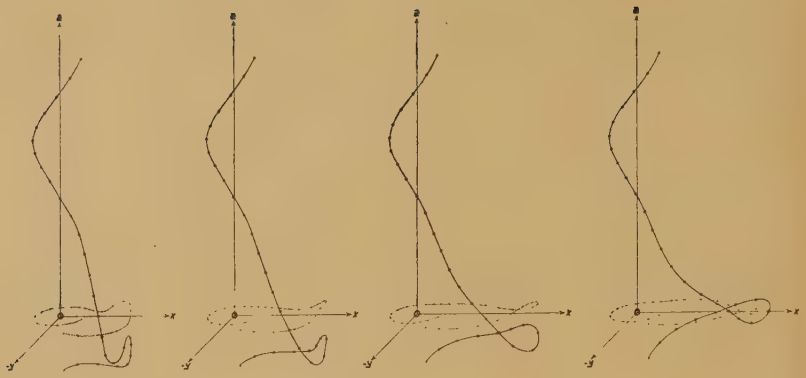

Abb. 11

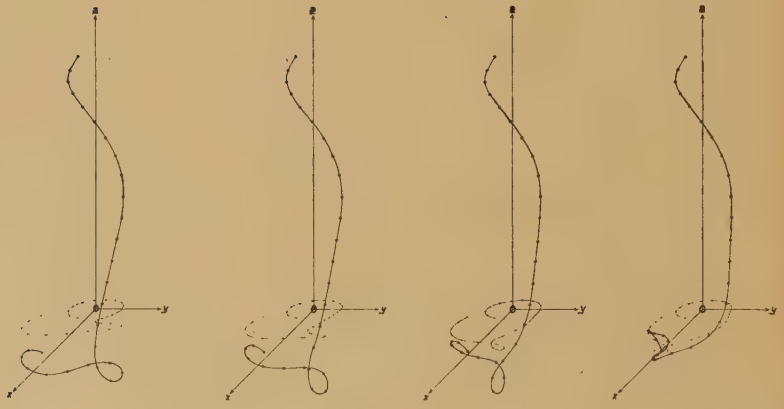

Abb. 12

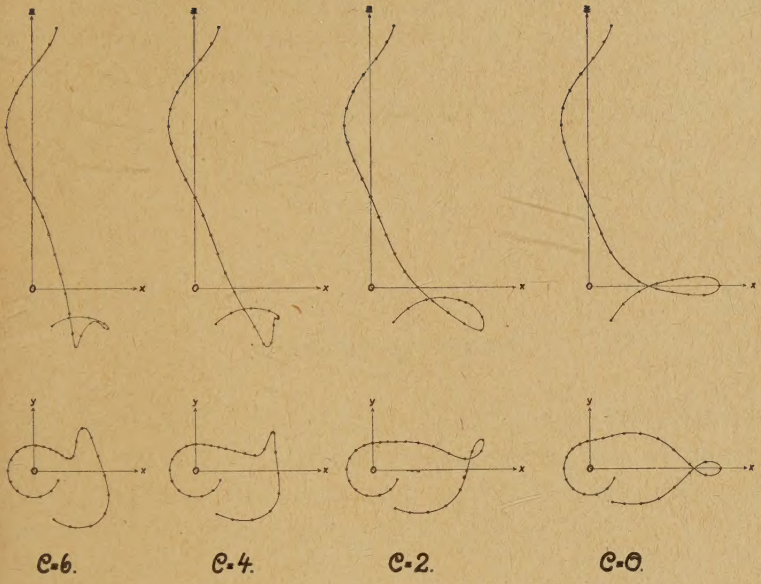

Abb. 13

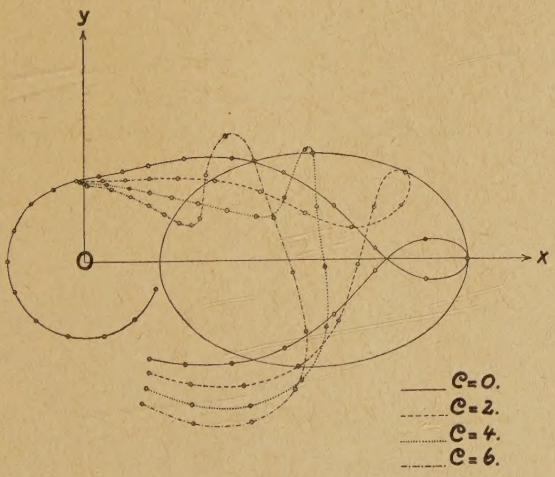

Abb. 14

Vielmehr liefert die nochmalige Anwendung der Transformation auf die Kurve H_1^0 unendlich viele verschiedene Kurven, die Kurven H_2. In Fig. 14 sehen wir — entsprechend Fig. 8 — die Projektionen der Kurven H_2 für $C = 0, 2, 4, 6$ auf die (x y)-Ebene. — Auch hier liegen die Punkte für den Parameterwert $s = o$ auf einem Kreis, der sich als Ellipse projiziert, die mit eingezeichnet ist.

Zusammenfassung.

In der vorliegenden Arbeit wurde im ersten Kapitel die Transformation von Bianchi gebracht, die aus einer Kurve konstanter Torsion unendlich viele Kurven derselben konstanten Torsion liefert. Das zweite Kapitel enthält die Anwendung dieser Transformation auf die Schraubenlinie des Kreiszylinders, die Kurve H_0, und die daraus hervorgehenden ∞^1 Kurven derselben konstanten Torsion, die Kurven H_1. Wir konnten nachweisen, daß diese ∞^1 Kurven H_1 durch Schraubung um die z-Achse ineinander übergeführt werden können, daß also die Transformation auf die Kreiszylinderschraubenlinie im Grunde genommen nur eine neue Kurve konstanter Torsion ergibt. Von diesen ∞^1 Kurven H_1 greifen wir im dritten Kapitel eine bestimmte — die Kurve H_1^0 — heraus und wenden auf sie wiederholt die Transformation von Bianchi an; die entstehenden ∞^1 verschiedenen Kurven H_2 sind ebenfalls von derselben konstanten Torsion.

Es sei mir an dieser Stelle gestattet meinem hochverehrten Lehrer
Herrn Prof. Dr. K. Kommerell
für die Anregung zu dieser Arbeit und die stets fördernde Anteilnahme herzlich zu danken.

Lebenslauf.

Ich bin am 13. Oktober 1910 als Sohn des Oberreallehrers Karl Hofmann in Crailsheim geboren. Ab Ostern 1917 besuchte ich die Volksschule, bestand Herbst 1920 die Aufnahmeprüfung in die Realschule mit Lateinabteilung in Crailsheim und legte daselbst im Frühjahr 1926 die Prüfung der mittleren Reife ab. Sodann besuchte ich von Ostern 1926 bis Frühjahr 1929 die Oberrealschule in Schwäbisch Hall und erhielt dort das Zeugnis der Reife.

Anschließend widmete ich mich dem Studium der Mathematik und Physik an den Universitäten Tübingen, München und der Technischen Hochschule Stuttgart. Sommer 1934 war ich im freiwilligen Arbeitsdienst. Frühjahr 1936 legte ich die 1. Dienstprüfung für das Lehramt an den höheren Schulen ab und bin seit Juni 1936 Studienreferendar an der Friedrich-Eugens-Oberrealschule in Stuttgart.